N° 22 Nov. 1980
Actes VII JMHL

EL PROBLEMA DEL LÍMIT CENTRAL: TRES ASPECTES MENYS TÍPICS

Evarist Giné

Secció de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

El problema del límit central, que és el de l'estudi de la compacitat relativa i de la convergencia feble de sumes de petites variables més o menys independents, va ser totalment entès i resolt (en el cas d'independència, almenys) entre 1920 i 1945 i és una part central de la teoria clàssica de Probabilitats. Va ser pràcticament resolt en espais de Hilbert el 1962. L'estudi en espais de Banach va començar amb un treball de Fortet i Maurier el 1955 i de 1969 ençà, sobre tot des de 1974 fins el 1979, s'ha construït un cos de teoria ben complert i resolt una quantitat considerable de problemes.

En aquesta nota examinarem tres questions interessants que són menys típiques en el sentit que no es refereixen estrictament a convergència feble. La primera fa referència a la convergencia de moments en cas que es tingui d'entrada convergencia feble de les sumes del sistema triangular, la segona tracta de la relació entre compacitat feble de sumes i compacitat feble de les lleis de Poisson associades, i la tercera, sobre dominis d'atracció parcial. Potser el segon tema és el més classic però el primer és el que té més aplicacions.

1. <u>Convergencia de moments</u>. En tot el que ve $\{X_{nj}: j=1,\dots,k_n\}_{n=1}^{\infty}$ és una familia de variables aleatòries a valors en un Banach separable B tal que per a cada n les variables X_{nj} són independents. S_n és la suma de la "fila n", $S_n = \Sigma_j X_{nj}$. La pregunta que ens fem és la seguent: si $\mathcal{L}(S_n) \longrightarrow_d \nu$, sota quines condicions es tindrà $E||S_n||^p \to \int ||x||^p d\nu(x)$ o encara, $E\,\phi(S_n) \to \int \phi(x)d\nu(x)$ per a certa classe de funcions ϕ no necessariament fitades, que inclogui com a mínim les potències de la norma, i potser les funcions exponencials de la norma? Respostes definitives a aquesta pregunta han estat donades a [2] (amb el bon precedent de [14]) el 1979.

de la demostració. Recordem que $\{X_{nj}\}$ és infinitesimal si per a tot $\varepsilon > 0$, $\max_j P\{||X_{nj}|| > \varepsilon\} \to 0$.

Teorema ([2]). Sigui $\{X_{nj}\}$ un sistema infinitesimal tal que $L(S_n) \to_d \nu$. Suposem $E||X_{nj}||^p < \infty$ $(0 < p < \infty)$. Aleshores són equivalents:

(1) $\{\max_j ||X_{nj}||^p\}$ és uniformement integrable

(2) $\lim_{t\to\infty} \overline{\lim}_{n\to\infty} \Sigma_j E||X_{nj}||^p I_{\{||X_{nj}|| > t\}} = 0$

(3) $\int ||x||^p d\nu(x) < \infty$ i $E||S_n||^p \to \int ||x||^p d\nu(x)$.

Demostració(Esboç). Considerem només el cas simetric. L'equivalencia de (1) i (2) és fàcil d'establir i l'ometem. Si (3) es verifica, aleshores $\{||S_n||^p\}$ és uniformament integrable, i en el cas simetric això implica (1) per la desigualtat de P.Lévy. La part important de la demostració és (1) $\Rightarrow$ (3), o el que és el mateix, que si $\{\max_j ||X_{nj}||^p\}$ és uniformament integrable, també $\{||S_n||^p\}$ ho és. Hi ha dues maneres equivalents de relacionar $N_n = \max_j ||X_{nj}||$ amb $||S_n||$, que són la desigualtat de Kolmogorof ([1]) i una desigualtat de Hoffmann-Jorgensen ([10])

$$P\{||S_n|| > 2t+s\} \leq P\{N_n > s\} + 4P^2\{||S_n|| > t\}.$$

Aleshores, aplicant aquesta desigualtat i integració per parts com a [10], es té que per a tot A tal que $P\{||S_n|| > A/3\} < 1/16.3^p$, $1/2\, E||S_n||^p I_{\{||S_n|| > A\}}$ $\leq 2.3^p E||N_n||^p I_{\{||N_n|| > A\}}$, $1/2\, E||S_n||^p \leq 2.3^p E||N_n||^p + 8.3^p.A^p$.

Aquestes dues desigualtats donen la integrabilitat uniforme de $\{||S_n||^p\}$ si $\{\max_j ||X_{nj}||^p\}$ és uniformament integrable.

Corol.lari 2 ([2]). (1) Si X_i són i.i.d., $E||X_1||^p < \infty$ per a algun $p > 0$ i si $L(\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2}) \to_d \gamma$ Gaussiana, es té $E||\Sigma_{i=1}^n X_i/n^{1/2}||^p \to \int ||x||^p d\gamma(x)$

(2) Si X_i són i.i.d. i existeixen $a_n \uparrow \infty$, $b_n \in B$ tals que $L(\Sigma_{i=1}^n X_i/a_n - b_n) \to \rho$ estable d'ordre $\alpha \in (0,2]$, aleshores $E||\Sigma_{i=1}^n X_i/a_n - b_n||^\beta \to \int ||x||^\beta d\rho(x)$ per a tot $\beta < \alpha$.

Per aplicacions d'aquests teoremes vegi's [2] i [8].

2. Lleis acompanyants.

Si μ és una mesura finita sobre B, es definex Pois μ com

$$\text{Pois}\,\mu = e^{-\mu(B)} \Sigma_{n=0}^{\infty} \mu^n/n!$$

on μ^n és l'enèssima potència de convolució de μ. Sigui $\{X_{nj}\}$ un sistema infinitesimal i $S_n = \Sigma_{j=1}^{k_n} X_{nj}$. S'anomenen lleis acompanyants de les $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ les probabilitats $\{\text{Pois}(\Sigma_{j=1}^{k_n}\mathcal{L}(X_{nj}))\}$ on $\mathcal{L}(X)$ denota la llei de la variable aleatòria X. El mètode clàssic d'atac del problema general del límit central en $\mathbb{R}$ va ser el de reduïr la convergència de $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ a la de les lleis acompanyants i després demostrar resultats de convergencia de lleis de Poisson i, en general, de lleis infinitament divisibles. De fet un exàmen detallat de la questió mostra que per a demostrar el t.l.c. general, tant en $\mathbb{R}$ com en B general, l'únic resultat essencial sobre lleis acompanyants és el següent:

$$||\mathcal{L}(S_n)\text{-Pois }\Sigma_j\mathcal{L}(X_{nj})||_{vt} \leq C.\Sigma_j P^2\{X_{nj} \neq 0\}$$

on $||\ \ ||_{vt}$ és la norma de la variació total, resultat que val en general i que és elemental: és simplement la traducció a mesures de la sesigualtat $|x_1 \ldots x_n - e^{\Sigma(x_i-1)}| \leq C.\Sigma(x_i-1)^2$ per a $|x_{i-1}| \leq 2$. Segueix essent pero interessant de saber si en B, com en $\mathbb{R}$, $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ és relativament compacte si i només si $\{\text{Pois }\Sigma_j\mathcal{L}(X_{nj})\}$ ho és (cal tenir en compte centraments si les variables no són simetriques). Per a sistemes infinitesimals la pregunta té una resposta definitiva

<u>Teorema 3</u> ([13];[4]). Suposem que les X_{nj} són simètriques. Aleshores:

(1) Si $\{\text{Pois}(\Sigma_j\mathcal{L}(X_{nj}))\}$ és relativament compacte, també $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ ho és, qualsevol que sigui B el Banach separable on X_{nj} pren valors.

(2) c_0 no és finitament representable en B si i només si, per a tot sistema infinitesimal de variables a valors en B simètriques amb $\{\mathcal{L}(S_n)\}$ relativament compacte, resulta que també $\{\text{Pois }\Sigma_j\mathcal{L}(X_{nj})\}$ és relativament compacte.

La demostració de (1) es pot trobar a [13] , i la de (2) sortirà a [4]. La de [4] es basa sobre tot en una desigualtat fonamental de Maurey i Pisier vàlida només en els espais on c_0 no és finitament representable, que és: c_0 no és finitament representable en B si i només si per a tota successió $\{\eta_k\}$(per a alguna) de variables reals centrades i.i.d. amb $P\{|\eta_1| > t\} > 0$ i $E|\eta_1|^p < \infty$ per a tot p, existeix $C = C(B,p,\eta_1)$ tal que per a tota successió $\{x_i\}$ de B finita.

$$E||\Sigma_i x_i \eta_i||^p \leq C\, E||\Sigma x_i \varepsilon_i||^p$$

on $\{\varepsilon_i\}$ és una successió de Rademacher. Es combina amb la desigualtat elemental: Si $\{\xi_i\}$ son independents de les X_{nj} i Poisson amb paràmetre 1, aleshores

$$\int \|x\|^p \, d\,\mathrm{Pois}\, \Sigma_j \mathcal{L}(X_{nj})(x) \leq C\,E\|\Sigma_j \xi_{nj} X_{nj}\|^p .$$

Problema obert: se sap que (2) és veritat per a sistemes no infinitesimals si se suposa que B té una base de Schauder; és aquest requeriment necessari?

3. Dominis d'atracció parcial. Un dels últims problemes clàssics sobre convergència feble de sumes de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes que es van tractar és el dels dominis d'atracció parcial. Efectivament, perquè X sigui atreta per una llei estable d'ordre p és necessari (i suficient si X és simètrica) que $t^p P\{|X| > t\}$ sigui una funció de variació lenta ($p < 2$) o que $EX^2 I_{\{|X| \leq t\}}$ sigui de variació lenta ($p = 2$) i aleshores $t^2 P\{|X| > t\}/EX^2 I_{\{|X| \leq t\}} \to 0$. Dit amb altres paraules, només si les cues de la distribució de X simètrica són de decreixement prou ràpid i regular es pot esperar que existeixin $\{a_n\}$ tals que $\mathcal{L}(X_1 + \ldots + X_n)/a_n) \to_d \gamma$, on les X_i són i.i.d. amb $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{L}(X)$. La pregunta natural seria: quan existeixen $\{a_n\}$ tals que $\{\mathcal{L}((X_1 + \ldots + X_{n_k})/a_{n_k})\}$ és relativament compacta a menys d'un centrament per a alguna subseccessió $\{n_k\}$? I també, quins són els posibles límits? Khinxin [12] va demostrar que els possibles límits de tals subsuccession són les lleis infinitament divisibles. Doeblin [7] va demostrar que hi ha variables per a les quals es poden obtenir com a límits totes les lleis infinitament divisibles i d'altres que no pertanyen al domini d'atracció de cap; també va donar condicions perquè X sigui parcialment atreta per alguna llei. Jain i Orey [11] estudien el conjunt N(X) de totes les subsuccessions a_{n_k} tals que $\{\mathcal{L}((X_1 + \ldots + X_{n_k})/a_{n_k})\}$ és relativament compacte a menys d'un certament. Tot això per a variables reals. Si X té valors en un Hilbert, Baranska [5], [6] demostra el teorema de Khinxin i l'existència de lleis universals de Doeblin. De fet aquests resultats valen en espais de Banach separables (Giné [9]).

Direm que una probabilitat ν sobre B pertany al domini d'atracció parcial de ρ si existeixen $n_k \uparrow \infty$ $\{a_{n_k}\} \in \mathbb{R}$, $a_{n_k} \uparrow \infty$, $b_{n_k} \in B$ tals que si X_i son i.i.d. amb $\mathcal{L}(X_i) = \nu$, aleshores $\mathcal{L}(X_1 + \ldots + X_{n_k})/a_{n_k} - b_{n_k} \to_d \rho$. Es té:

Teorema 4 ([9]). Una probabilitat ρ sobre un Banach separable B té domini d'atracció parcial no buit si i només si és infinitament divisible. Sobre tot Banach separable existeixen distribucions que pertanyen al domini d'atracció parcial de totes les lleis infinitament divisibles.

Teorema 5 ([9]). (1) Si X té valors en $\mathbb{R}^n$, aleshores $N(X) = N(\|X\|)$ i els conjunts de constants de normalització admissibles $\{a_{n_k}\}$ són els mateixos.

(2) Per a tota X a valors en B, $N(X) \neq \emptyset$ implica $N(\|X\|) \neq \emptyset$.

(3) Si $N(\|X\|) \neq \emptyset$ implica $N(X) \neq \emptyset$ per a tota variable X aleshores B és de dimensió finita.

(4) B és de cotipus 2 si i només si per a tota X a valors en B, $N(X) \subset N(\|X\|)$ i per a $\{n_i\} \in N(X)$, $\{a_{n_i}\}$ és admissible per a X si i només si ho és per a $\|X\|$.

La demostració del Teorema 4 es pot fer adaptant la demostració clàssica, que depèn de funcions característiques, traduint les manipulacions de tals funcions a manipulacions de variables aleatòries, i fent servir la distància d_{BL^*} en lloc de funcions característiques. La del Teorema 5 depèn de tecniques i resultats de [11] i [1] així com de la construcció de contraexemples; les demostracions detallades sortiran a [9].

REFERENCIES

1. de Acosta,A.;Araujo,A. and Giné,E. (1978). On Poisson measures, Gaussian measures and the central limit theorem in Banach spaces. Advances in Probability 4, 1-68. Dekker, New York (Ed. by J.Kuelbs).

2. de Acosta,A. and Giné,E. (1979). Convergence of moments and related functionals in the general CLT in Banach spaces. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie v. Geb. 48, 213-231.

3. de Acosta,A. and Samur,J. (1979). Infinitely divisible probability measures and the converse Kolmogorov inequality in Banach spaces. Studia Math. LXVI, 143-160.

4. Araujo,A.;Giné,E.;Mandrekar,V. and Zinn,J. (en premsa). On the validity of the accompanying laws theorem in Banach spaces. Ann. Probability.

5. Baranska,J. (1973). Domains of partial attraction for infinitely divisible distributions in Hilbert space. Coll. Math. XXVIII. 317-322.

6. Baranska,J. (1978). Universal Doeblin distributions in a Hilbert space. Bull. Acad. Polonaise de Sciences XXVI, 343-346.

7. Doeblin, W. (1940). Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité. Studia Math. 9, 71-96.

8. Philipp,W. (en premsa). L^p and almost sure invariance principles for sums of B-valued variables. Ann. Probability.

9. Giné,E. (en premsa). Domains of partial attraction in several dimensions. Ann. Inst. H. Poincaré XVI.

10. Hoffmann-Jørgensen,J. (1974). Sums of independent Banach space valued random variables. Studia Math. 52, 159-186.

11. Jain,N. and Orey,S. (en premsa). Domains of partial attraction and tightness conditions.

12. Khinchin,A.(1937). Zur Theorie der unbeschrankt teilbaren Verteilungsgesetze. Mat. Sbornik 2 (44), 79-120.

13. Le Cam,L.(1969) Remarques sur le théoreme limite central dans les spaces localement convexes. Les Probabilités sur les structures algébriques (CNRS, Paris), 233-249.

14. Kruglov,V.N. (1973). Convergence of numerical characteristics of sums of independent random variables with values in Hilbert space. Teor. Probability Appl. 18, 694-712.

Bellaterra, 20 de maig 1980.